PART2 不等式の表す領域

要点 ① 直線を境界とする領域

x，y に関する不等式を満たす点 (x, y) 全体の集合を，その不等式の表す「　　」という。

不等式 $y > x-1$ の表す領域について考える。

点 $P(x_1, y_1)$ が $y > x-1$ を満たす領域にあるとき

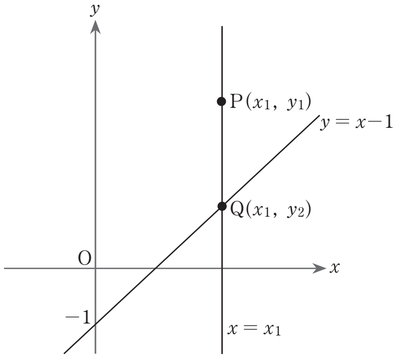
$$y_1 > x_1 - 1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

また，点 P を通り x 軸に垂直な直線 $x = x_1$ と 直線 $y = x-1$ の交点を $Q(x_1, y_2)$ とすると

$$y_2 = x_1 - 1 \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。



①，②より　　　　　である。

よって，点 P は点 Q より　　にあり，

すべての x_1 に関してこれは成立する。

したがって，点 P は直線 $y = x-1$ より　　にある。

逆に，点 $P(x_1, y_1)$ が直線 $y = x-1$ より上側にあるとき，(x_1, y_1) は不等式 $y > x-1$ を満たす。

ゆえに，不等式 $y > x-1$ の表す領域は，直線 $y = x-1$ の　　である。

同様に，$y < x-1$ の表す領域は，直線 $y = x-1$ の　　である。

一般に，直線で分けられる領域について，次のことが成り立つ。

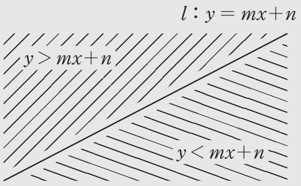
直線を境界とする領域

直線 $y = mx+n$ を l とすると

不等式 $y > mx+n$ の表す領域は 直線 l の上側

不等式 $y < mx+n$ の表す領域は 直線 l の下側

いずれも，境界線 $y = mx+n$ は含まない。

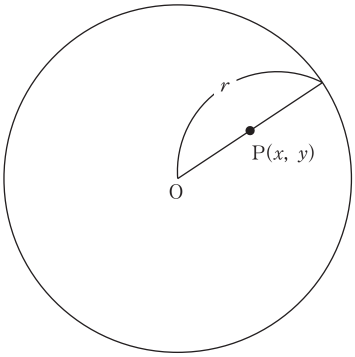


要点② 円を境界とする領域

不等式 $x^2+y^2<r^2$ ……① の表す領域について考える。

原点Oから点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ までの距離OPについて

$$\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2}\quad より\ \mathrm{OP}^2=x^2+y^2$$



であるから，①は

$$\mathrm{OP}^2<r^2\quad すなわち\ \mathrm{OP}<r$$

である。これは，①を満たす点Pが，原点中心，半径 r の円の　　にあることを表している。

よって，不等式①の表す領域は，円 $x^2+y^2=r^2$ の　　である。

同様に，$x^2+y^2>r^2$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=r^2$ の　　である。

一般に，円で分けられる領域について，次のことが成り立つ。

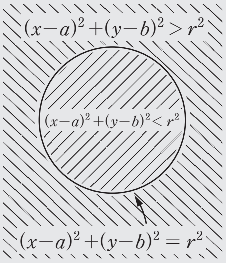
円を境界とする領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とすると

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は 円 C の内部

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は 円 C の外部

いずれも，境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ は含まない。



2 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > 2x+1$

(2) $x+3y \leqq 3$

(3) $x \geqq 1$

(4) $y-2 < 0$

(5) $x^2+y^2 < 9$

(6) $(x-1)^2+(y-2)^2 \geqq 2$

Point Pickup

直線を境界とする領域

不等式 $y > mx+n$ の表す領域 …… 直線 $y = mx+n$ の上側

不等式 $y < mx+n$ の表す領域 …… 直線 $y = mx+n$ の下側

いずれも境界線 $y = mx+n$ は含まない。

円を境界とする領域

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2 < r^2$ の表す領域 …… 円 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ の内部

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2 > r^2$ の表す領域 …… 円 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ の外部

いずれも境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ は含まない。

不等式の表す領域を図示する手順

① 境界線を図示する。必要に応じて「切片」を記入する。

② 不等式の表す領域に斜線を入れる。

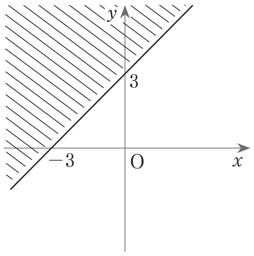
③ 領域に境界線を含むか含まないかを明記する。

第 7 講　PART2 確認問題

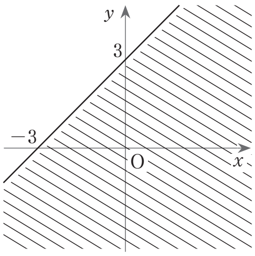
次の不等式の表す領域を，①，②のうちから選べ。

1　$y<x+3$　ア

①

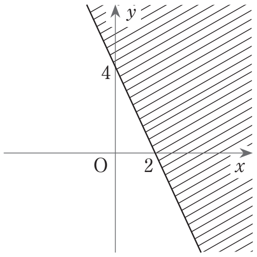


②

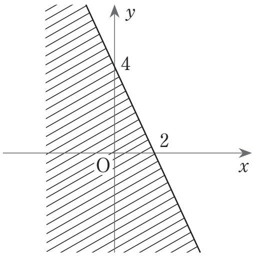


2　$2x+y\geqq 4$　イ

①

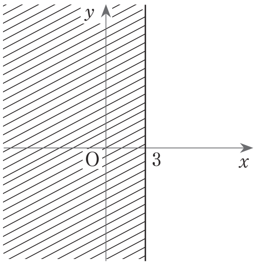


②

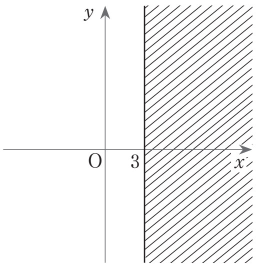


3　$x\leqq 3$　ウ

①

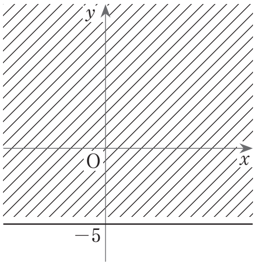


②

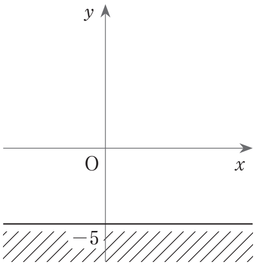


4 $y+5>0$ エ

①

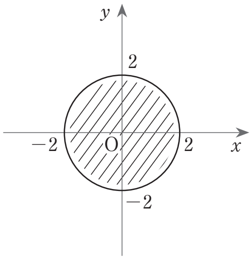


②

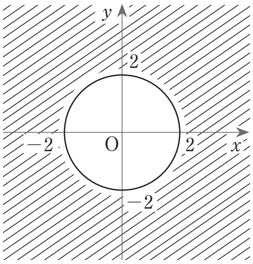


5 $x^2+y^2<4$ オ

①

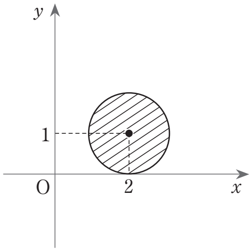


②

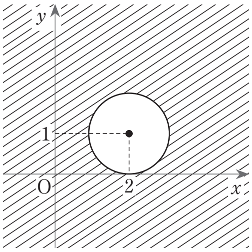


6 $(x-2)^2+(y-1)^2 \geqq 1$ カ

①



②



【MEMO】

PART2 不等式の表す領域

2 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > 2x+1$　　(2) $x+3y \leqq 3$

(3) $x \geqq 1$　　(4) $y-2 < 0$

(5) $x^2+y^2 < 9$　　(6) $(x-1)^2+(y-2)^2 \geqq 2$

[解答]

(1) 直線 $y=2x+1$ の上側。

(2) $x+3y \leqq 3$ より $y \leqq -\frac{1}{3}x+1$　　よって，直線 $y=-\frac{1}{3}x+1$ およびその下側。

(3) 直線 $x=1$ およびその右側。

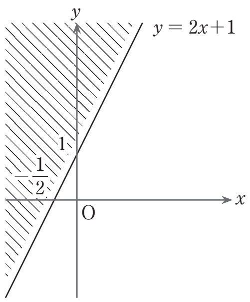
(4) $y-2<0$ より $y<2$　　よって，直線 $y=2$ の下側。

(5) 円 $x^2+y^2=9$ の内部。

(6) 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ およびその外部。

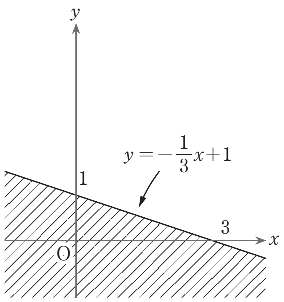
よって，求める領域は下図斜線部分。

(1)



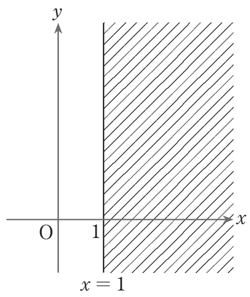
ただし，境界線は含まない。

(2)



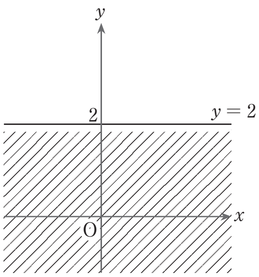
ただし，境界線を含む。

(3)



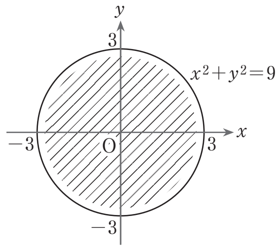
ただし，境界線を含む。

(4)



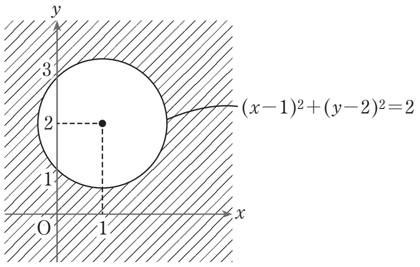
ただし，境界線は含まない。

(5)



ただし，境界線は含まない。

(6)



ただし，境界線を含む。

第 7 講　PART2 確認問題 解答

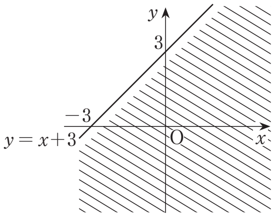
1

[正解] ア：②

[解説]

不等式 $y<x+3$ の表す領域は，直線 $y=x+3$ の下側である。 [A]

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線は含まない。

[A]　不等式 $y<mx+n$ の表す領域
直線 $y=mx+n$ の下側（境界線 $y=mx+n$ は含まない）

2

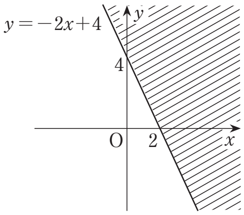
[正解] イ：①

[解説]

$2x+y \geqq 4$ より　$y \geqq -2x+4$

この不等式の表す領域は，直線 $y=-2x+4$ およびその上側である。 [B]

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線を含む。

[B]　不等式 $y \geqq mx+n$ の表す領域
直線 $y=mx+n$ の上側（境界線 $y=mx+n$ を含む）

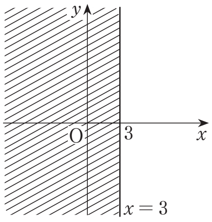
3 [正解] ウ：①

[解説]

不等式 $x \leqq 3$ の表す領域は，直線 $x=3$ およびその左側である。 [C]

> [C]　不等式 $x \leqq m$ の表す領域
> 直線 $x=m$ の左側（境界線 $x=m$ を含む）

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線を含む。

4 [正解] エ：①

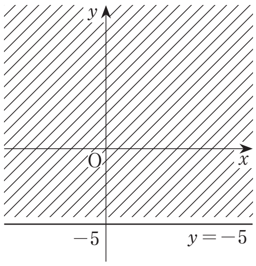
[解説]

$y+5>0$ より $y>-5$

この不等式の表す領域は，直線 $y=-5$ の上側である。 [D]

> [D]　不等式 $y>m$ の表す領域
> 直線 $y=m$ の上側（境界線 $y=m$ は含まない）

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線は含まない。

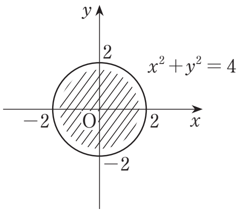
5 [正解] オ：①

[解説]

不等式 $x^2+y^2<4$ の表す領域は,

円 $x^2+y^2=4$ の内部である。 [E]

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線は含まない。

> [E]　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域
> 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の内部（境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ は含まない）

6 [正解] カ：②

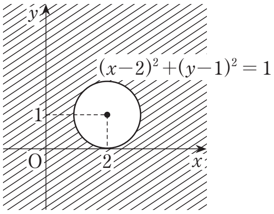
[解説]

不等式 $(x-2)^2+(y-1)^2\geqq1$ の表す領域は,

円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ およびその外部である。

[F]

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線を含む。

> [F]　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2\geqq r^2$ の表す領域
> 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の外部（境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を含む）